

Diffraction d'une onde solitaire par une île circulaire

M. J. PINETTES

Institut de Mécanique (I.M.G.), Grenoble, France

(Received October 17, 1979)

SUMMARY

In this paper, we tried to describe the diffraction of a solitary wave by a circular island, situated within an ocean of uniform depth. So we made the following assumptions:

- the fluid, initially at rest, is homogeneous, incompressible and heavy
- the bottom and the vertical outlines of the island are impermeable
- the free surface is impermeable and it is an isobar.

As a solitary wave cannot be described by means of the classic 'Poincaré's small-parameter' method, we used here the shallow-water theory. The small parameter ϵ represents the ratio of vertical to horizontal length scales. We replaced the cylindrical coordinates r, θ, z of a particle M by the following ones:

$$\bar{r} = \epsilon r, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = \epsilon \sqrt{gh} t.$$

Then, the problem amounts to calculating the function $\bar{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t})$ (the velocity potential, harmonic in the domain occupied by the fluid and satisfying the conditions imposed by our assumptions) and the free surface elevation denoted by $\bar{z} = \eta(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t})$.

We sought the solution in the form of power series in ϵ and we only calculated here the first approximation, by means of the Fourier transform. A numerical example was studied, allowing to illustrate our results with some curves.

0. Introduction

La diffraction d'une onde sinusoïdale par un obstacle de forme circulaire est un problème classique (cf. [1] par exemple). La diffraction d'une onde solitaire par une île de forme circulaire est un problème différent pour deux raisons. D'une part, la prise en compte de la condition à la surface libre rend le problème non linéaire. D'autre part, le phénomène perturbateur, qui se compose d'une onde solitaire ou d'une succession de telles ondes, nécessite la description d'un régime transitoire et non plus celle d'un régime établi.

Le présent mémoire est consacré à ce sujet. Les calculs analytiques ont été menés le plus loin possible afin d'éliminer, pour les applications, les difficultés que la présence d'un domaine infini entraîne dans l'emploi de méthodes purement numériques.

1. Position du problème et équations

D'une océan à fond horizontal émerge une île de forme circulaire à bord vertical. Le fluide océanique, initialement au repos, est perturbé par la propagation d'une onde solitaire qui est diffractée par l'île.

Le fluide, considéré comme parfait et pesant, occupe un domaine limité par le fond horizontal de l'océan, le bord vertical de l'île et la surface libre a priori inconnue, ces trois surfaces étant imperméables. La surface libre, de plus, est une isobare.

Le repère fixe $Oxyz$ est choisi de manière à ce que le point O coïncide avec le centre de l'île, Oz soit vertical ascendant et le plan xOy représente le plan de niveau moyen de la surface libre.

On note g la mesure de l'accélération de la pesanteur, $-h$ la cote du fond de l'océan, r_0 le rayon de l'île, (r, θ, z) les coordonnées cylindriques d'un point quelconque M , $\mathbf{V}(r, \theta, z, t)$ la vitesse de la particule de fluide qui, à l'instant t se trouve en M et $z = \eta(r, \theta, t)$ l'équation, a priori inconnue, de la surface libre.

Le fluide étant initialement au repos, son mouvement ultérieur sera irrotationnel. Nous savons que, dans ce cas, le problème se ramène à la détermination d'une fonction $\phi(r, \theta, z, t)$ potentiel des vitesses défini par

$$\text{grad } \phi(r, \theta, z, t) = \mathbf{V}(r, \theta, z, t).$$

La fonction ϕ est alors astreinte à vérifier les conditions suivantes:

– dans le domaine occupé par le fluide ($-h \leq z \leq \eta(r, \theta, t)$, $r \geq r_0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$), ϕ est harmonique:

$$\Delta\phi = 0,$$

– le fond ($z = -h$) et le bord de l'île ($r = r_0$), qui sont des frontières fixes, sont imperméables:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{la dérivée normale est nulle})$$

– la surface libre ($z = \eta(r, \theta, t)$) est également imperméable:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

– la surface libre est une isobare:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0$$

$$\text{pour } z = \eta(r, \theta, t).$$

La condition de radiation ainsi que les conditions imposées à l'infini, relatives à l'onde incidente et à l'amortissement de l'onde diffractée seront précisées ultérieurement.

2. Théorie de l'eau peu profonde

Le problème non linéaire qui est ainsi posé ne saurait être abordé directement. On peut penser à utiliser la méthode du petit paramètre de Poincaré: nous connaissons une solution particulière,

le repos (qui correspond d'ailleurs aux données initiales) et nous pourrions rechercher des solutions voisines, c'est-à-dire développables en séries entières par rapport à un petit paramètre. Nous remplacerions alors le problème à étudier par une suite infinie de problème linéaires correspondant aux puissances du petit paramètre.

Malheureusement, la perturbation d'une onde solitaire ne saurait être décrite dans le cadre de cette théorie (cf. [2]). Cette méthode ne peut donc s'appliquer au cas qui nous intéresse.

La théorie de l'eau peu profonde est, par contre, tout à fait adaptée à notre étude. Cette théorie, développée depuis les travaux de Keller [3] est exposée ici suivant l'approche de Germain [4].

Effectuons le changement de variables suivant:

$$\bar{r} = \epsilon r, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = \epsilon \sqrt{gh} t,$$

où ϵ est un petit paramètre de distorsion non précisé a priori. Nous noterons $\bar{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t}) = \phi(r, \theta, z, t)$ le potentiel des vitesses et $\bar{\eta}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t}) = \eta(r, \theta, t)$ l'équation de la surface libre.

Nous supposons que le rayon r_0 de l'île est de l'ordre de $1/\epsilon$. Sur l'île, \bar{r} prend donc une valeur $\bar{r}_0 = \epsilon r_0$ qui sera de l'ordre de l'unité.

Les équations du problème se mettent alors sous la forme suivante:

- dans la masse $-h \leq \bar{z} \leq \bar{\eta}, \bar{r} \geq \bar{r}_0, 0 \leq \bar{\theta} \leq 2\pi$:

$$\epsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{\theta}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0,$$

- sur le fond:

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=-h} = 0,$$

- sur le contour de l'île:

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0} = 0,$$

- à la surface libre:

la pression constante:

$$\epsilon \sqrt{gh} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} \right)_{\bar{z}=\bar{\eta}} + \frac{1}{2} \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\bar{r}^2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right]_{\bar{z}=\bar{\eta}} + g \bar{\eta} = 0,$$

l'imperméabilité:

$$\left\{ \epsilon \sqrt{gh} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\theta}} \right] = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right\}_{\bar{z}=\bar{\eta}}.$$

Afin d'exprimer les conditions à l'infini de notre problème, nous écrivons le potentiel $\bar{\phi}$ sous la forme:

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_i + \bar{\phi}_d,$$

$\bar{\phi}_i$ représente le potentiel de l'onde incidente, qui est une donnée du problème. L'onde diffractée, dont le potentiel inconnu est noté $\bar{\phi}_d$, est astreinte à s'amortir lorsque \bar{r} augmente indéfiniment et à vérifier la condition de radiation.

Nous connaissons une solution triviale du problème (le repos) pour laquelle le potentiel des vitesses $\bar{\phi}_0$ est identiquement nul. Nous savons (cf. 4) que le potentiel des vitesses de l'onde incidente $\bar{\phi}_i$ admet un développement asymptotique en série en ϵ :

$$\bar{\phi}_i(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n \bar{\phi}_{ni}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t}).$$

Nous rechercherons donc la solution du problème sous la forme de développements asymptotiques en série en ϵ :

$$\bar{\phi}_d(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n \bar{\phi}_{nd}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t})$$

et

$$\bar{\eta}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n \bar{\eta}_n(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t}).$$

3. Etude des premières approximations

Etant donné le caractère asymptotique de la solution que nous cherchons, nous nous limiterons ici au calcul de la première approximation, les approximations d'ordre supérieur pouvant se calculer suivant les mêmes principes.

Nous supposons que l'onde incidente se propage parallèlement à l'axe des x , dans le sens des x croissants:

$$\bar{\phi}_i(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{\phi}_i(\bar{r} \cos \bar{\theta} - \lambda \bar{t}, \bar{z}) \quad (\lambda = \text{constante positive}).$$

Nous savons que la célérité λ de cette onde, du moins en première approximation et avec les variables réduites utilisées, est égale à l'unité et qu'au même ordre d'approximation, le potentiel de vitesses est indépendant de z :

$$\bar{\phi}_{1i}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{\phi}_{1i}(\bar{r} \cos \bar{\theta} - \bar{t}).$$

De plus,

$$\bar{\phi}_{2i}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, \bar{t}) = 0.$$

– A l'ordre un, la fonction $\bar{\phi}_{1d}$ doit vérifier dans la masse:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{z}^2} = 0.$$

La condition sur le fond: $\left(\frac{\partial \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=-h} = 0$ entraîne alors que $\bar{\phi}_{1d}$ est indépendante de \bar{z} .

Les conditions à la surface libre déterminent la fonction $\bar{\eta}_1$:

$$\bar{\eta}_1(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t}) = 0.$$

– A l'ordre deux, suivant le même schéma de résolution des équations, nous obtenons que $\bar{\phi}_{2d}$ est une fonction indépendante de \bar{z} et que $\bar{\eta}_2$ se calcule par:

$$\bar{\eta}_2 = -\sqrt{h/g} \left[\frac{\partial \bar{\phi}_{1i}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{t}} \right].$$

– A l'ordre trois, les conditions dans la masse et sur le fond nous donnent:

$$\frac{\partial \bar{\phi}_{3i}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\phi}_{3d}}{\partial \bar{z}} = -(\bar{z} + h) [\Delta \bar{\phi}_{1i} + \Delta \bar{\phi}_{1d}]$$

Les conditions à la surface libre imposent alors:

$$\Delta \bar{\phi}_{1i} + \Delta \bar{\phi}_{1d} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{1i}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{t}^2}$$

ce qui donne, compte tenu de la forme particulière de $\bar{\phi}_{1i}$:

$$\Delta \bar{\phi}_{1d} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{t}^2},$$

relation à satisfaire dans la masse du fluide. Il reste à exprimer l'imperméabilité de l'île:

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}_{1i}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0} = 0$$

soit

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0} = \left(-\frac{\partial \bar{\phi}_{1i}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0}.$$

De plus, à l'infini, l'onde diffractée doit s'amortir et vérifier la condition de radiation.

4. Détermination complète de la première approximation

Il est bien évident que, dans le domaine occupé par le fluide, la fonction $\bar{\phi}_{1d}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t})$ est périodique en $\bar{\theta}$ de période 2π . De plus $\bar{\phi}_{1d}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t})$, compte tenu de la symétrie du problème par rapport au plan xOz , est paire en $\bar{\theta}$. Donc, le développement en série de Fourier de $\bar{\phi}_{1d}$ est de la forme:

$$\bar{\phi}_{1d}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t}) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n(\bar{r}, \bar{t}) \cos(n\bar{\theta}).$$

L'équation aux dérivées partielles que vérifie $\bar{\phi}_{1d}$ entraîne, pour les coefficients $l_n(\bar{r}, \bar{t})$, les relations:

$$\bar{r}^2 \frac{\partial^2 l_n}{\partial \bar{r}^2} + \bar{r} \frac{\partial l_n}{\partial \bar{r}} - \bar{r}^2 \frac{\partial^2 l_n}{\partial \bar{t}^2} - n^2 l_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Nous allons résoudre ces équations en utilisant la transformation de Fourier par rapport à la variable \bar{t} . Notons:

$$L_n(s, \bar{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} l_n(\bar{r}, \bar{t}) \exp(-2i\pi s \bar{t}) d\bar{t}.$$

Les équations vérifiées alors par les fonctions $L_n(s, \bar{r})$ sont les suivantes:

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 L_n}{d\bar{r}^2} + \bar{r} \frac{dL_n}{d\bar{r}} + (4\pi^2 \bar{r}^2 s^2 - n^2) L_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Elles ont pour solution générale:

$$L_n(s, \bar{r}) = A_n(s) J_n(2\pi s \bar{r}) + B_n(s) Y_n(2\pi s \bar{r}) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Les coefficients $A_n(s)$ et $B_n(s)$ seront déterminés par les conditions aux limites. L'amortissement de l'onde diffractée à l'infini et la condition de radiation se traduisent par le fait que, pour \bar{r} tendant vers l'infini, $\sqrt{\bar{r}} \bar{\phi}_{1d}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t})$ n'est fonction que de $\bar{\theta}$ et de $\bar{r} - \bar{t}$. D'où

$$l_n(\bar{r}, \bar{t}) \sim \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} f(\bar{r} - \bar{t})$$

ce qui implique

$$L_n(s, \bar{r}) \sim \frac{g(s)}{\sqrt{\bar{r}}} \exp(-2i\pi s \bar{r}).$$

Or:

$$L_n(s, \bar{r}) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{s\bar{r}}} \left[A_n(s) \cos \left(2\pi s\bar{r} - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) + B_n(s) \sin \left(2\pi s\bar{r} - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

D'où:

$$B_n(s) = -iA_n(s),$$

et par suite

$$L_n(s, \bar{r}) = A_n(s) \left[J_n(2\pi s\bar{r}) - iY_n(2\pi s\bar{r}) \right] \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Les coefficients $A_n(s)$ seront déterminés par la condition d'imperméabilité des bords de l'île et, par suite, dépendront de l'onde incidente.

5. Etude de la diffraction d'une onde solitaire

La théorie que nous venons d'élaborer va être appliquée au cas particulier où l'onde incidente est une onde solitaire. Le potentiel des vitesses associé à cette onde est de la forme (cf. [5]).

$$\bar{\phi}_{1i}(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{t}) = \frac{3a}{2\alpha} \operatorname{th}(\alpha(\bar{r} \cos \bar{\theta} - \bar{t})) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{3}{2h} \sqrt{\frac{a}{2\sqrt{gh}}}.$$

L'amplitude de l'onde incidente est donnée par $\frac{3a\epsilon^2}{2} \sqrt{\frac{h}{g}}$

L'imperméabilité de l'île impose la condition

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}_{1d}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0} = \left(- \frac{\partial \bar{\phi}_{1i}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0}$$

qui se traduit, pour la transformée de Fourier Φ_{1i} de $\bar{\phi}_{1i}$ par rapport à \bar{t} , par la condition

$$\left(\frac{\partial \Phi_{1d}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0} = \left(- \frac{\partial \Phi_{1i}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0} = - \frac{3a\pi^2 s \cos \bar{\theta}}{\alpha^2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi^2 s}{\alpha} \right)} \exp(-2\pi s \bar{r}_0 \cos \bar{\theta}),$$

soit,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_{1d}}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=\bar{r}_0} = & - \frac{3a\pi^2 s}{\alpha^2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi^2 s}{\alpha} \right)} \left[J_0(2\pi s \bar{r}_0) \cos \bar{\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n J_{2n}(2\pi s \bar{r}_0) \times \right. \\ & \times [\cos((2n+1)\bar{\theta}) + \cos(2(n-1)\bar{\theta})] + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n i J_{2n-1}(2\pi s \bar{r}_0) \times \\ & \left. \times [\cos(2n\bar{\theta}) + \cos((2n-2)\bar{\theta})] \right]. \end{aligned}$$

Par identification de ce résultat avec les résultats généraux obtenus au paragraphe précédent, nous tirons la valeur des coefficients $A_n(s)$:

$$A_0(s) = \frac{-3\alpha\pi i}{2\alpha^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi^2 s}{\alpha}\right)} \frac{J'_0(2\pi s \bar{r}_0)}{J'_0(2\pi s \bar{r}_0) - iY'_0(2\pi s \bar{r}_0)},$$

$$A_{2n}(s) = \frac{(-1)^{n+1} 3\alpha\pi i}{\alpha^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi^2 s}{\alpha}\right)} \frac{J'_{2n}(2\pi s \bar{r}_0)}{J'_{2n}(2\pi s \bar{r}_0) - iY'_{2n}(2\pi s \bar{r}_0)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$A_{2n+1}(s) = \frac{(-1)^{n+1} 3\alpha\pi}{\alpha^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi^2 s}{\alpha}\right)} \frac{J'_{2n+1}(2\pi s \bar{r}_0)}{J'_{2n+1}(2\pi s \bar{r}_0) - iY'_{2n+1}(2\pi s \bar{r}_0)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Il en résulte que la transformée de Fourier Φ_{1d} de la fonction $\bar{\phi}_{1d}$ et, par suite cette dernière fonction, sont complètement définies:

$$\Phi_{1d}(\bar{r}, s, \bar{\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(s) [J_n(2\pi s \bar{r}) - iY_n(2\pi s \bar{r})] \cos(n\bar{\theta}),$$

$$\bar{\phi}_{1d}(\bar{r}, t, \bar{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{1d}(\bar{r}, s, \bar{\theta}) \exp(2i\pi s t) ds.$$

Afin d'illustrer les possibilités de la méthode de résolution que nous venons de décrire, nous avons étudié le cas suivant:

L'île a un diamètre de 200 km; la profondeur moyenne autour de cette île est de 300 m; l'amplitude de l'onde incidente est de 1 m, son pincement (distance séparant le maximum du point où l'amplitude est 1/10 m) est environ de $r_0/10$.

L'inversion de la transformée de Fourier Φ_{1d} a été faite numériquement par la méthode de la 'Fast Fourier Transform'.

Nous nous sommes intéressés, en premier lieu, à la réflexion de l'onde en amont de l'île ($\theta = \pi$) (cf. Figure 1). Pour cela, nous avons calculé la dénivellation de la surface libre en fonction du temps pour les valeurs: $r = r_0, \frac{3}{2}r_0, 2r_0, \frac{5}{2}r_0, 3r_0$. En chacun de ces points, on remarque dans le temps, d'abord le passage de l'onde incidente correspondant au premier maximum égal à l'unité, puis le passage de l'onde réfléchie correspondant au second maximum dont l'amplitude est une fonction décroissante de r . Sur l'île, ces deux maxima coïncident: ayant même amplitude, ils donnent une dénivellation totale de 2 m.

Nous avons ensuite étudié la variation de l'amplitude de l'onde totale sur les bords de l'île (cf. Fig. 2) aux points suivants:

$$r = r_0; \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{13\pi}{36}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{36}, \quad 0.$$

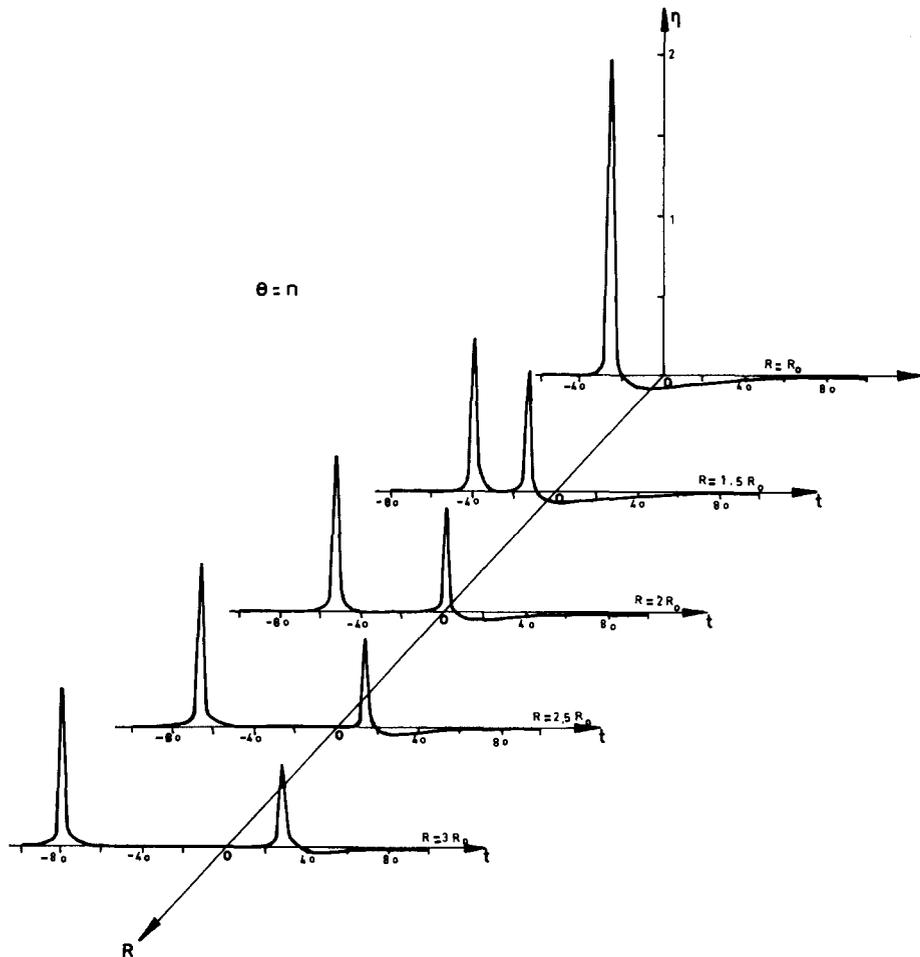


Fig. 1. Dénivellation de la surface libre en fonction du temps en différents points en amont de l'île ($\theta = \pi$; $r = r_0, \frac{3}{2}r_0, \dots$).

Les résultats obtenus peuvent être interprétés de la manière suivante. Un premier maximum, dû à la superposition des ondes incidente et diffractée, va en décroissant avec θ : les parties correspondantes de l'île sont de mieux protégées. Lorsque l'onde incidente a dépassé l'obstacle, l'onde diffractée continue à tourner autour de l'île tout en s'amortissant lentement, donnant lieu à un second maximum d'amplitude beaucoup plus faible.

Sur la Figure 3, nous avons mis en évidence les parties mouillées du contour de l'île en fonction de θ . Pour le cas particulier choisi, il est à remarquer que, si dans la région attaquée par l'onde incidente ($\theta = \pi$) l'amplitude du tsunami est de 2 m, elle n'est plus que de l'ordre de 0.25 m pour la partie opposée. Le léger maximum observé pour $\theta = 0$ s'explique par le croisement des ondes diffractées symétriquement.

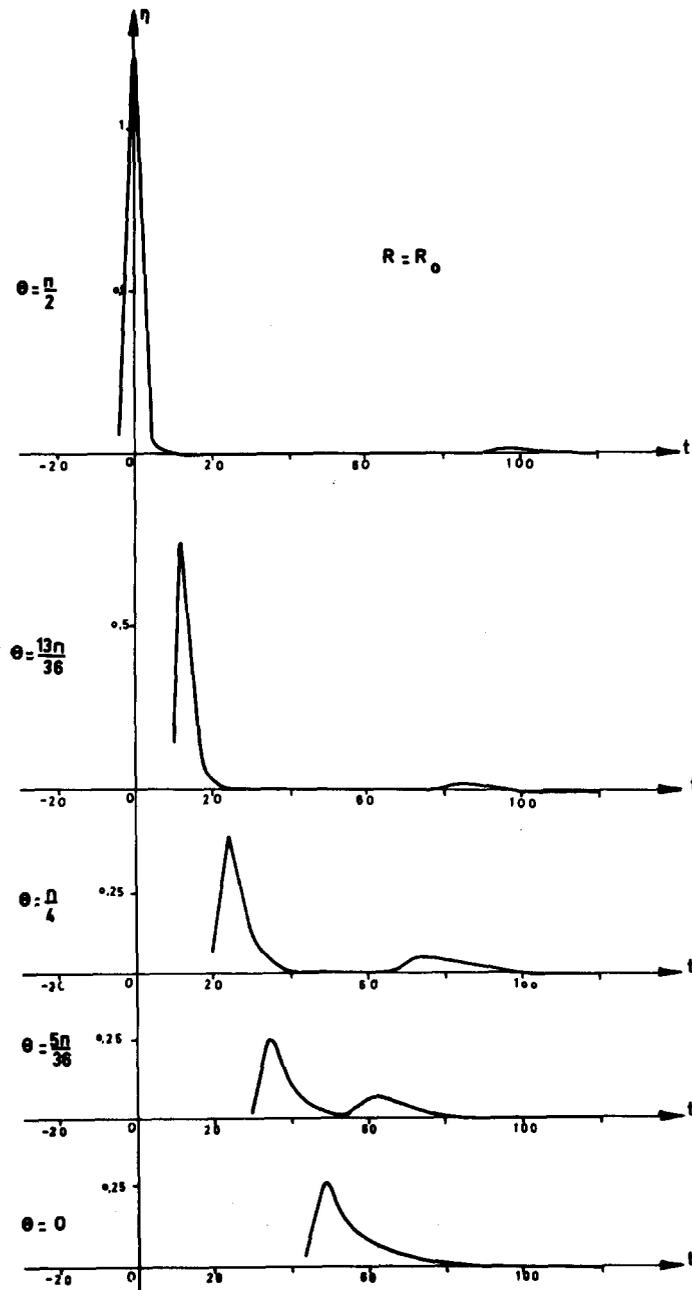


Fig. 2. Dénivellation de la surface libre en fonction du temps en différents points situés sur le contour de l'île.

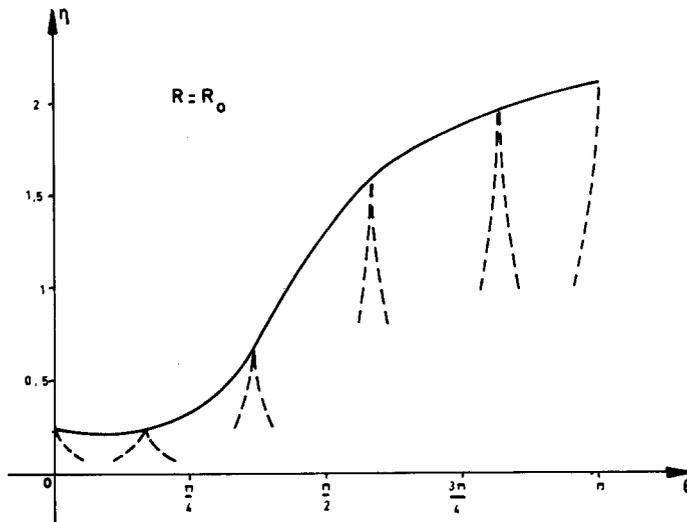


Fig. 3. Hauteur d'eau maximum calculée sur le contour de l'île. On notera le léger maximum obtenu à l'aval de l'île ($\theta = 0$).

Nous nous sommes enfin intéressés à l'amortissement de l'onde à l'arrière de l'île ($\theta = 0$) en fonction du rayon r_0 (cf. Fig. 4). Pour la même onde incidente, nous avons calculé l'amplitude maximum observée au point $r = r_0, \theta = 0$ pour les valeurs suivantes: $r_0 = 25$ km, 50 km, 75 km, 100 km. Comme on pouvait s'y attendre, l'amortissement est d'autant plus fort que le rayon de l'île est plus grand. Pour une île de rayon nul, cet amortissement doit être nul, ce qui est en accord avec le graphique. Il semble bien, d'autre part, que pour r_0 augmentant indéfiniment η_{\max} tende vers zéro.

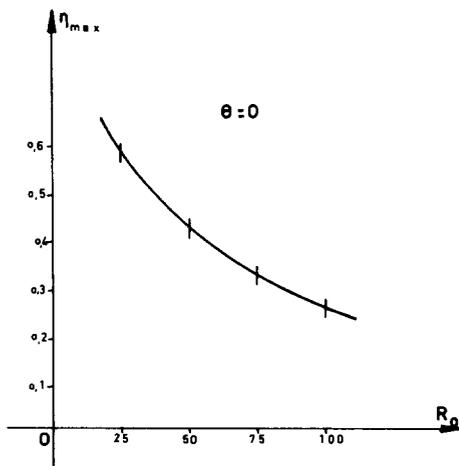


Fig. 4. Evolution de la hauteur d'eau maximum sur le contour de l'île à l'aval ($\theta = 0, r = r_0$) en fonction du rayon de l'île.

REFERENCES

- [1] M. Parodi, *Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur. T. 5: Les équations aux dérivées partielles.* SEDES, 1966. p. 161: Diffraction d'une onde plane par un cylindre.
- [2] J. P. Germain, *Contribution à l'étude de la houle en eau peu profonde.* Thèse, Université de Grenoble (1967).
- [3] J. B. Keller. The solitary waves and periodic waves in shallow water, *Comm. Appl. Math.* 1 (1948) 323-339.
- [4] J. P. Germain, Sur une généralisation de la théorie des mouvements en eau peu profonde, *C.R.A.S.* 273, série A (1971) 1093.
- [5] J. V. Wehausen, E. Laitone, *Surface waves.* Handbuch der Physik, Band IX – Strömungsmechanik III. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1959.